第 7 章

積分技巧

目錄

(1) 介紹在求不定積分時常用的技巧

(2) 介紹如何估計定積分之值

(3) 介紹瑕積分的概念

7.1 基本積分公式

7.1.1. (1) $\int du = u + C$

(2) $\int u^n = \int \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$

(3) $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$

(4) $\int \sin u du = -\cos u + C$

(5) $\int \cos u du = \sin u + C$

(6) $\int \sec^2 u du = \tan u + C$

(7) $\int \csc^2 u du = -\cot u + C$

(8) $\int \sec u \tan u du = \sec u + C$

(9) $\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$

(10) $\int \tan u du = -\ln|\cos u| + C = \ln|\sec u| + C$

(11) $\int \cot u du = \ln|\sin u| + C = -\ln|\csc u| + C$

(12) $\int \sec u du = \ln|\tan u + \sec u| + C$

(13) $\int \csc u du = -\ln|\cot u + \csc u| + C$

(14) $\int \exp u du = \exp u + C$

(15) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

(16) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}(\frac{u}{a}) + C$

(17) $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{u}{a})$+C

(18) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}|\frac{u}{a}| + C$

(19) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \sinh^{-1}(\frac{u}{a}) + C$

(20) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1}(\frac{u}{a}) + C$

(21) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \begin{cases} \frac{1}{a}\tanh^{-1}(\frac{u}{a}) + C & u^2 < a^2 \\ \frac{1}{a}\coth^{-1}(\frac{u}{a}) + C & u^2 > a^2 \end{cases}$

(22) $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\text{sech}^{-1}(\frac{u}{a}) + C,\ 0 < u < a$

(23) $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\text{csch}^{-1}(\frac{u}{a}) + C,\ u \neq 0,\ a > 0$

例 7.1.2. 求下列積分:

(1) $\int \frac{2x-9}{x^2-9x+1}dx$

(2) $\int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}dx$

(3) $\int \frac{3x^2-7x}{3x+2}dx$

(4) $\int \frac{x}{2x+5}dx$

(5) $\int \frac{1}{x^2+4x+5}dx$

例 7.1.3. 求下列積分:

(1) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$

(3) $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{3+4x^2}}\, dx$

例 7.1.4. 求下列積分:

(1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-4}}$

(2) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}}$

(3) $\int \frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}dx$

(4) $\int \frac{\sqrt{2x^2+3}}{x^4}dx$

例 7.1.5. 求下列積分:

(1) $\int (\sec x + \tan x)^2 dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\cos 4x}dx$

(3) $\int \frac{1}{1-\csc x}dx$

(4) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$

(5) $\int \cos x \cos 2x \cos 3x \, dx$

例 7.1.6. 求下列積分:

(1) $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$

(2) $\int \text{coth}5x \, dx$

(3) $\int_0^1 \sinh^2 x \, dx$

(4) $\int_0^{\ln 2} 4e^x \text{sinh}x \, dx$

(5) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

例 7.1.7. 若 $0 < a < b$, 求 $\lim\limits_{t\to 0}\left\{\int_0^1 [bx+a(1-x)]^t dx\right\}^{\frac{1}{t}}$。

7.2 分部積分(Integration by Parts)

定理 7.2.1. (分部積分公式) $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$,
或 $\int udv = uv - \int vdu$。

例 7.2.2. 求下列積分:

(1) $\int x\sin x dx$

(2) $\int x\cos x dx$

例 7.2.3. 求下列積分:

(1) $\int t^2 e^t dt$

(2) $\int x^4 e^x dx$

例 7.2.4. 求下列積分:

(1) $\int e^x \sin x dx$

(2) $\int e^{ax} \cos bx dx$

例 7.2.5. 求下列積分:

(1) $\int \ln x dx$

(2) $\int \arctan x dx$

(3) $\int \sin^{-1} x dx$

(4) $\int x \sin^{-1} x dx$

(5) $\int (\cos^{-1} x)^2 dx$

例 7.2.6. 求下列積分:

(1) $\int x\,(x+5)^8\,dx$

(2) $\int x\,(x^2+5)^8\,dx$

(3) $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$

(4) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$

定理 7.2.7. (定積分之分部積分公式) $\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$。

例 7.2.8. 求曲線 $y = xe^{-x}$與 x-軸在 $x = 0$ 到 $x = 4$ 之間所圍的面積。

例 7.2.9. 將曲線 $y = \arctan x$, $y = 0$ 及 $x = 1$ 所圍區域繞 y-軸旋轉。求旋轉體體積。

例 7.2.10. 若 $f(0) = g(0) = 0$, 且 f'' 及 g'' 爲連續, 證明 $\int_0^a f(x)g''(x)dx = f(a)g'(a) - f'(a)g(a) + \int_0^a f''(x)g(x)dx$。

例 7.2.11. 假設 $f(x)$ 爲正值, 且 $f'(x)$ 爲連續, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) \sin nx dx$。

7.3 遞迴公式(Reduction Formulae)

例 7.3.1. 求下列積分:

(1) $\int x^n e^x dx$

(2) $\int x^4 e^{-x} dx$

例 7.3.2. 求下列積分:

(1) $\int x^n \ln x dx$

(2) $\int (\ln x)^n dx$

例 7.3.3. 求下列積分:

(1) $\int x^3 \sin x dx$

(2) $\int x^n \sin x dx$

例 7.3.4. 求下列積分:

(1) $\int \sin^n x dx$

(2) $\int_0^1 (1-x)^p x^q \, dx$, p, q 爲正整數

7.4 三角函數的冪次

$\int \sin^m x \cos^n x dx$ 型

例 7.4.1. 求下列積分:

(1) $\int \cos^5 x dx$

(2) $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$

(3) $\int_0^\pi \sin^2 x dx$

(4) $\int \sin^4 x dx$

(5) $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$

例 7.4.2. (Wallis 公式)

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$

例 7.4.3. (Wallis 乘積) 令 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$。

(a) 證明 $\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1$。

(b) 證明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$。

(c) 證明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \cdots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$ 。

$\int \tan^m x \sec^n x dx$ 型

例 7.4.4. 求下列積分:

(1) $\int \tan^n x dx$

(2) $\int \sec^n x dx$

(3) $\int \tan^3 x dx$

(4) $\int \sec^3 x dx$

例 7.4.5. 求下列積分:

(1) $\int \tan^3 x \sec^3 x dx$

(2) $\int \tan^3 x \sec^4 x dx$

(3) $\int \tan^4 x \sec^4 x dx$

(4) $\int \tan^4 x \sec^3 x dx$

(5) $\int \tan^5 x \sec^7 x dx$

(6) $\int \tan^6 x \sec^4 x dx$

例 7.4.6. 求 $f(x) = \int_0^{\pi} \cos t \cos(x-t) dt,\ \ 0 \le x \le 2\pi$, 的極小值。

<u>其它</u>

例 7.4.7. $\int \sin 4x \cos 5x dx$

例 7.4.8. 令 m, n 爲正整數, 求下列積分:

(a) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx$

(b) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx$

(c) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx$

例 7.4.9. 令 $J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, 則 $J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} J_n$。

例 7.4.10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx$

7.5 有理函數的積分

性質 7.5.1.

1. 任一實係數多項式必可分解成不可約的一次及二次因式的乘積。
2. 任一有理式可寫成多項式及眞分式之和。
3. 令$\frac{p(x)}{q(x)}$爲一眞分式, $q(x) = (x+a_1)^{n_1} \cdots (x+a_k)^{n_k} (x^2+b_1 x+c_1)^{m_1} \cdots (x^2+b_l x+c_l)^{m_l}$, 其中 a_i 均相異, $x^2+b_i x+c_i$ 亦爲各自相異之不可約因式。則 $\frac{p(x)}{q(x)}$ 可表成 $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{f_1(x)}{(x+a_1)^{n_1}} + \cdots + \frac{f_k(x)}{(x+a_k)^{n_k}} + \frac{g_1(x)}{(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{g_l(x)}{(x^2+b_lx+c_l)^{m_l}}$, 其中 $\deg f_i(x) < n_i, \deg g_j(x) < 2m_j$
4. $\frac{f(x)}{(x+a)^n}, \deg f(x) < n$, 必可表成 $\frac{f(x)}{(x+a)^n} = \frac{\alpha_1}{x+a} + \frac{\alpha_2}{(x+a)^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{(x+a)^n}, \alpha_i \in \mathbb{R}$
5. $\frac{g(x)}{(x^2+bx+c)^m}, \deg g(x) < 2m$, 必可表成 $\frac{g(x)}{(x^2+bx+c)^m} = \frac{\beta_1 x+\gamma_1}{x^2+bx+c} + \cdots + \frac{\beta_m x+\gamma_m}{(x^2+bx+c)^m}, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}$

註 7.5.2. (1) 以上 3. 4. 5. 項之表法稱爲部分分式 (partial fractions)。

(2) 求部分分式之表法一般可用未定係數法, 代入法, Heaviside 法及綜合除法。

(3) 由以上性質, 可知任一有理函數之積分必可分解成多項式之積分及以下六種類型之積分:

(a) $\int \frac{1}{x+a} dx$

(b) $\int \frac{1}{(x+a)^n}dx, n \neq 1$
(c) $\int \frac{1}{x^2+ax+b}dx$
(d) $\int \frac{cx+d}{x^2+ax+b}dx, c \neq 0$
(e) $\int \frac{1}{(x^2+ax+b)^n}dx, n \neq 1$
(f) $\int \frac{cx+d}{(x^2+ax+b)^n}dx, c \neq 0, n \neq 1$, 其中 x^2+ax+b 爲不可約。

例 7.5.3. 以不同的方法求以下的積分:

(1) $\int \frac{x^3+x}{x-1}dx$

(2) $\int \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}dx$ (對照係數法)

(3) $\int \frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)}dx$ (代入數值法)

(4) $\int \frac{x-1}{(x+1)^3}dx$ (微分法)

(5) $\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}dx$ (綜合除法)

例 7.5.4. 求以下的積分:

(1) $\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}dx$

(2) $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$

(3) $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$, $a \neq 0$

(4) $\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}dx$

(5) $\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$

(6) $\int \frac{x^2+4}{x^3+3x^2-10x}dx$

(7) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)\cdots(x+m)}$

例 7.5.5. 求以下的積分:

(1) $\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3}dx$

(2) $\int \frac{x^2+1}{x(x^2+3)}dx$

(3) $\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx$

(4) $\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}dx$

例 7.5.6. 求以下的積分:

(1) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$

(2) $\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}dx$

(3) $\int \frac{2x^2+3x+4}{(x^2+x+1)^2}dx$

(4) $\int \frac{x^3+x^2+1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}dx$

定理 7.5.7. (M. B. Ostrogradski) 令 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 爲一眞分式。則其積分可寫爲 $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx$, 其中 $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ 均爲眞分式, 且 $Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$,

$$Q_1(x) = (x-a)^{k-1}\cdots(x^2+px+q)^{m-1}\cdots, \quad Q_2(x) = (x-a)\cdots(x^2+px+q)\cdots。$$

例 7.5.8. 求以下的積分:

(1) $\int \frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}dx$

(2) $\int \frac{2x^6+5x^5-10x^4-60x^3-96x^2-201x-24}{(x-1)^3(x+1)(x^2+2x+5)^2}dx$

例 7.5.9. 若 f 爲二次函數, $f(0)=1$, 且 $\int \frac{f(x)}{x^2(x+1)^3}dx$ 爲有理函數, 求 $f'(0)$。

7.6 三角函數之有理式

7.6.1. 被積分式是三角函數之有理式, 可作 $u = \tan\frac{x}{2}$ 之變數變換。

例 7.6.2. 求以下的積分:

(1) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

(2) $\int \frac{dx}{2+\sin x}$

(3) $\int \sec\theta d\theta$

(4) $\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$

7.7 三角代換

7.7.1. 形如 $\int R(x,\sqrt{1-x^2})dx, \int R(x,\sqrt{1+x^2})dx, \int R(x,\sqrt{x^2-1})dx$ 之積分, 可分別作 $x=\sin\theta,\ x=\tan\theta,\ x=\sec\theta$ 之變數變換。

例 7.7.2. 求以下的積分:

(1) $\int \frac{x^2}{\sqrt{5-4x^2}}dx$

(2) $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$

(3) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx$

(4) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

(5) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$

(6) $\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{\frac{3}{2}}}dx$

(7) $\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$

(8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}},\ a>0$

(9) $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}}, x>\frac{2}{5}$

例 7.7.3. 求以下的積分:

(1) $\int x\sqrt{x^2+2x+4}dx$

(2) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$

例 7.7.4. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k(k-1)}}$。

例 7.7.5. 將曲線 $y=\frac{4}{x^2+4}$, x 軸及 $x=0, x=2$ 所圍區域繞 x-軸旋轉, 求旋轉體體積。

例 7.7.6. 求橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 之內部面積。

例 7.7.7. 一大圓半徑爲 R, 一小圓半徑爲 r, 兩圓相交, 交點在小圓的直徑上。求在大圓外部, 且在小圓內部之部份 (新月形 lune) 的面積。

7.8 其他型式

$\int R(e^x)dx$ 型

例 7.8.1. 求以下的積分:

(1) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$

(2) $\int \frac{1+\sinh x}{1+\cosh x}dx$

$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ 型

例 7.8.2. 求以下的積分:

(1) $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$

(2) $\int \sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})\,dx$

(3) $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2\sqrt{x+1}}dx$

(4) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

$\int R(\sqrt[n_1]{ax+b}, \sqrt[n_2]{ax+b}, \ldots, \sqrt[n_k]{ax+b})dx$ 型

例 7.8.3. 求以下的積分:

(1) $\int \frac{dx}{(1+x)^{3/2}+(1+x)^{1/2}}$

(2) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$

Chebyshev 定理

定理 7.8.4. (P. L. Chebyshev) 令 m, n, p 爲有理數。則形如 $\int x^m(a+bx^n)^p$ 之積分可 表爲基本函數之充要條件爲 p, $\frac{m+1}{n}$ 及 $\frac{m+1}{n}+p$ 中有一爲整數。

例 7.8.5. 求以下的積分:

(1) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$

(2) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

(3) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$

定理 7.8.6. 令 $y=f(x)$ 是遞增可微函數。則

$$\int_a^b f^{-1}(x)\,dx = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f(x)\,dx。$$

例 7.8.7. 求以下的積分:

(1) $\int_0^1 \sin^{-1} x\,dx$

(2) $\int_1^e \ln x\,dx$

例 7.8.8. 令 $g(x)$ 爲 $f(x)=x+\sin x$ 的反涵數, 求 $\int_0^{1+\frac{\pi}{2}} g(x)dx$。

7.9 數値積分(Numerical Integration)

註 7.9.1. (1) 以下之積分爲非基本函數之例: $\int \sin(x^2)dx, \int \frac{\sin x}{x}dx, \int \sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}dx,$
$\int \sqrt{1+x^4}dx, \int \sqrt{x^3+1}dx, \int e^{-x^2}dx, \int e^{e^x}dx, \int \frac{e^x}{x}, \int \frac{1}{\ln x}dx, \int \ln(\ln x)dx, \int \cos(e^x)dx$。

(2) 本節內容所採用之符號如下: 要估計 $\int_a^b f(x)dx$。將 $[a,b]$ n 等分, 得分點 $x_0=a, x_1=a+\Delta x, x_2=a+2\Delta x, \ldots, x_{n-1}=a+(n-1)\Delta x, x_n=b, \Delta x=\frac{b-a}{n}, y_i=f(x_i)$。

中點法

定理 7.9.2. (中點法, The Midpoint Rule)
$\int_a^b f(x)\,dx \approx M_n = \triangle x\,[f(\bar{x_1})+\cdots+f(\bar{x_n})]$, 其中 $\triangle x=\frac{b-a}{n}$, $\bar{x_i}=\frac{1}{2}(x_{i-1}+x_i)$。

定理 7.9.3. (中點法誤差) 若 f'' 在 $[a,b]$ 上連續, 且 M_2 爲 $|f''|$ 在 $[a,b]$ 之上界, 則上述估計之誤差 E_M 滿足 $|E_M| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}$。

例 7.9.4. (1) 以中點法 (取 $n=5$) 估計 $\int_1^2 \frac{dx}{x}$。

(2) 若要誤差小於 0.0001, 則該取 n 爲多少?

例 7.9.5. 利用中點法 , 取 $n=10$ 估計 $\int_0^1 e^{x^2}dx$。其誤差的上界是多少?

梯形法

定理 7.9.6. (梯形法,The Trapezoidal Rule)
$\int_a^b f(x)dx \approx T = \frac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$。

定理 7.9.7. (梯形法誤差) 若 f'' 在 $[a,b]$ 上連續, 且 M_2 爲 $|f''|$ 在 $[a,b]$ 之上界, 則上述估計之誤差 E_T 滿足 $|E_T| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$。

例 7.9.8. 以 $n = 4$ 估計 $\int_1^2 x^2 dx$。

例 7.9.9. 以 $n = 10$ 的梯形法, 估計 $\int_0^\pi x \sin x dx$, 誤差之上界爲何?

例 7.9.10. 以梯形法來估計 $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}dx$, 希望誤差 $< 10^{-6}$, 則須取 n 爲多少?

抛物線法

定理 7.9.11. (抛物線法, Simpson Rule) 取 n 爲偶數。
$\int_a^b f(x)dx \approx S = \frac{b-a}{3n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$。

定理 7.9.12. (抛物線法誤差) 若 $f^{(4)}$ 在 $[a,b]$ 上連續, 且 M_4 爲 $|f^{(4)}|$ 在 $[a,b]$ 上的上界, 則上述估計之誤差 E_S 滿足 $|E_S| \leq \frac{M_4(b-a)^5}{180n^4}$。

例 7.9.13. (1) 利用 Simpson 法, 取 $n = 10$ 估計 $\int_1^2 \frac{dx}{x}$。

(2) 若要誤差小於 10^{-6}, 則該取 n 爲何?

例 7.9.14. 一湖如圖, 估計湖面面積。

7.10 瑕積分 (Improper Integrals)

第一型瑕積分

定義 7.10.1. (第一型瑕積分)

(1) 若 $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 連續, 則 $\int_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$。

(2) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 連續, 則 $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$。

(3) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 連續, 則任取一實數 c, 定義 $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$。

在以上任一情況下, 若右式的極限存在, 則稱瑕積分收斂 (convergence), 且其值稱爲瑕積分之值, 否則稱爲發散 (divergence)。

例 7.10.2. 求 $\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}} dx$。

例 7.10.3. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}dx$。

註 7.10.4. $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim\limits_{a\to\infty} \int_{-a}^a f(x)dx$ 不見得成立。例如: $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2}dx$

例 7.10.5. 求曲線 $y = \frac{\ln x}{x^2}$ 之下從 $x = 1$ 到 $x = \infty$ 的面積。

例 7.10.6. 求第一型 p-積分 $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ 之值。

例 7.10.7. 求 $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$。

例 7.10.8. 求 $\int_2^\infty \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}dx$。

例 7.10.9. 一立體其垂直於 x-軸之截面爲直徑 $y=e^x$ 的圓, $-\infty < x \leq \ln 2$, 求其體積。

第二型瑕積分

定義 7.10.10. (第二型瑕積分)

(1) 若 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 連續, 則 $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{c\to a^+} \int_c^b f(x)dx$。

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 連續, 則 $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx$。

(3) 令 $c \in (a,b)$。若 $f(x)$ 在 $[a,c)\cup(c,b]$ 連續, 且在 $x=c$ 不連續, 則
$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$。

在以上任一情況下, 若右式的極限存在, 則稱瑕積分收斂 (convergence), 且其值稱爲瑕積分之值, 否則稱爲發散 (divergence)。

例 7.10.11. 求第二型 p-積分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ 之值。

例 7.10.12. 求 $\int_0^3 \frac{1}{x-1}dx$。

例 7.10.13. 求 $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx$。

例 7.10.14. 求 $\int_{-2}^1 \frac{dx}{x^2}$。

例 7.10.15. 求 $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$。

例 7.10.16. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec x\, dx$。

例 7.10.17. 求 $\int_0^1 \ln x\, dx$。

例 7.10.18. 求 $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2-4}$。

瑕積分審斂法

定理 7.10.19. (直接比較法, Direct Comparison Test) 令 f 及 g 在 $[a,\infty)$ 上連續, 且 $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \geq a$, 則

(1) 若 $\int_a^\infty g(x)dx$ 收斂, 則 $\int_a^\infty f(x)dx$ 收斂。

(2) 若 $\int_a^\infty f(x)dx$ 發散, 則 $\int_a^\infty g(x)dx$ 發散。

例 7.10.20. 判斷以下瑕積分之斂散:

(1) $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$;

(2) $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$;

(3) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2-0.1}}dx$。

(4) $\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x}dx$。

定理 7.10.21. (極限比較法, Limit Comparison Test) 若 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上連續且為正值, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ 存在, 則 $\int_a^\infty f(x)dx$ 及 $\int_a^\infty g(x)dx$ 同斂散。

例 7.10.22. 判斷以下瑕積分之斂散:

(1) $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$;

(2) $\int_1^\infty \frac{3}{e^x+5}dx$。

例 7.10.23. 判斷以下瑕積分之斂散:

(1) $\int_1^\infty \frac{2+\sin x}{\sqrt{x}}dx$,

(2) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx$。

例 7.10.24. (a) 證明: 在 $a>-1$, 且 $b>a+1$ 時, 積分 $\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^b}dx$ 收斂;

(b) 證明: 在 $a<-1$, 且 $b<a+1$ 時, 積分 $\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^b}dx$ 收斂 。

例 7.10.25. 求 C 之值, 使瑕積分 $\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}-\frac{C}{x+2}\right)dx$ 收斂, 並求此時之積分值。

例 7.10.26. 求下列極限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ 。

例 7.10.27. 若 n 為正整數,

(1) 證明 $\int_0^1(\ln x)^n dx=(-1)^n n!$,

(2) 證明 $\int_0^1(1-x^2)^n dx=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ 。

7.11　綜合例題

求下列積分:

(1) $\int_{-2}^2|x^2-4x|dx$

(2) $\int_0^5\frac{3w-1}{w+2}dw$

(3) $\int_0^4\frac{x-1}{x^2-4x-5}dx$

(4) $\int\frac{x-1}{x^2-4x+5}dx$

(5) $\int\frac{x-1}{x^2-2x+5}dx$

(6) $\int_0^2 \frac{2t}{(t-3)^2}dt$

(7) $\int \frac{3x^2-2}{x^3-2x-8}dx$

(8) $\int_2^3 \frac{u^3+1}{u^3-u^2}du$

(9) $\int \frac{1}{(x-2)(x^2+4)}dx$

(10) $\int \frac{1}{x^4+4}dx$

(11) $\int \frac{x}{x^4-a^4}dx$

(12) $\int \frac{x}{x^4+x^2+1}dx$

(13) $\int \frac{dx}{x(x^4+1)}$

(14) $\int_1^\infty \frac{x^2-3}{x^4+2x^2+9}dx$

(15) $\int \frac{1}{x^6-1}dx$

(16) $\int \frac{x^3}{(x+1)^{10}}dx$

(17) $\int \frac{x^4}{x^{10}+16}dx$

(18) $\int_{-1}^\infty \left(\frac{x^4}{1+x^6}\right)^2 dx$

(19) $\int \frac{1}{x^n-x}dx$, (n 爲正整數)

(20) $\int \frac{1}{x^n(x-a)}dx$, ($a \neq 0$ 且 n 爲正整數)

(21) $\int_0^\infty \frac{x^n}{(1+x^2)^{1+\frac{n}{2}}}dx$, ($n$ 爲正整數)

(22) $\int x\sqrt[3]{x+c}dx$

(23) $\int_0^1 (1+\sqrt{x})^8 dx$

(24) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}dx$

(25) $\int \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt[3]{t}}dt$

(26) $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}dx$

(27) $\int \frac{1}{x\sqrt{4x+1}}dx$

(28) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4x+1}}dx$

(29) $\int \frac{1}{x+4+4\sqrt{x+1}}dx$

(30) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$

(31) $\int \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x}}dx$

(32) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$

(33) $\int \sqrt{3-2x-x^2}dx$

(34) $\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{x^2-x}}$

(35) $\int \frac{2t^2+\sqrt{1-t^2}}{t\sqrt{1-t^2}}dt$

(36) $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

(37) $\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(38) $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(39) $\int \frac{x}{1-x^2+\sqrt{1-x^2}}dx$

(40) $\int \frac{1}{\sqrt{4y^2-4y-3}}dy$

(41) $\int \frac{1}{x-\sqrt{1-x^2}}dx$

(42) $\int \frac{x}{\sqrt{3-x^4}}dx$

(43) $\int \frac{d\theta}{\sqrt{1+\sqrt[3]{\theta}}}$

(44) $\int_0^1 (\sqrt[3]{1-x^7} - \sqrt[7]{1-x^3})dx$

(45) $\int_0^1 3(x-1)^2(\int_0^x \sqrt{1+(t-1)^4}dt)dx$

(46) $\int \sin^3\theta\cos^5\theta d\theta$

(47) $\int \sin x\cos(\cos x)dx$

(48) $\int \tan^3\theta\, d\theta$

(49) $\int \tan^5 x\sec^4 dx$

(50) $\int \tan^5 x\sec^7 x dx$

(51) $\int_0^{\pi/4} \cos^2\theta\tan^2\theta d\theta$

(52) $\int (\sin x+\cos x)^2 dx$

(53) $\int \sin 4x\cos 3x dx$

(54) $\int \sin x\sin 2x\sin 3x dx$

(55) $\int \sin\sqrt{at}dt$

(56) $\int \frac{\cos^5 x}{\sqrt{\sin x}}dx$

(57) $\int \frac{\cos^6 x}{\sin^4 x} dx$

(58) $\int \frac{\tan\theta}{\sec^2\theta} d\theta$

(59) $\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x} dx$

(60) $\int \frac{1}{1-\cos x} dx$

(61) $\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$

(62) $\int \frac{dx}{1+\sin x-\cos x}$

(63) $\int \frac{\cos x+\sin x}{\sin 2x} dx$

(64) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x} dx$

(65) $\int \frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+2}} d\theta$

(66) $\int \frac{\sec x\cos 2x}{\sin x+\sec x} dx$

(67) $\int \frac{\tan x}{\tan x+\sec x} dx$

(68) $\int \frac{1}{1-\tan^2 x} dx$

(69) $\int \frac{3+\sec^2 x+\sin x}{\tan x} dx$

(70) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1+4\cot x}{4-\cot x} dx$

(71) $\int \sqrt{\tan x} dx$

(72) $\int \frac{\sin 2\theta}{1+\tan\theta} d\theta$

(73) $\int \frac{dx}{\tan x+\sin x}$

(74) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\tan\theta}}{\sin 2\theta} d\theta$

(75) $\int \tan^5 x \sqrt[3]{\cos x} dx$

(76) $\int x\sin^2 x dx$

(77) $\int (x+\sin x)^2 dx$

(78) $\int x\sin^2 x\cos x dx$

(79) $\int \theta\tan^2\theta d\theta$

(80) $\int_{-1}^{1} x^8 \sin x dx$

(81) $\int x\sin^{-1} x dx$

(82) $\int x^{-2}\tan^{-1} x dx$

(83) $\int_1^3 \frac{\arctan\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$

(84) $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x dx$

(85) $\int_0^1 \frac{\sin^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$

(86) $\int e^{x+e^x}dx$

(87) $\int \frac{1}{e^{3x}-e^x}dx$

(88) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$

(89) $\int \frac{1}{1+2e^x-e^{-x}}dx$

(90) $\int \frac{e^{2t}}{1+e^{4t}}dt$

(91) $\int e^x\sqrt{1+e^x}dx$

(92) $\int \sqrt{1+e^x}dx$

(93) $\int \frac{2e^{2x}-e^x}{\sqrt{3e^{2x}-6e^x-1}}dx$

(94) $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$

(95) $\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx$

(96) $\int x^5e^{-x^3}dx$

(97) $\int t^3e^{-2t}dt$

(98) $\int (2x^2+1)e^{x^2}dx$

(99) $\int (27)^{3\theta+1}d\theta$

(100) $\int x^2\sinh mx dx$

(101) $\int_{-1}^1 \frac{e^{\arctan y}}{1+y^2}dy$

(102) $\int e^t\sin(at-3)dt$

(103) $\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$

(104) $\int_0^\infty xe^{-x}\sin x dx$

(105) $\int x^2\ln(1+x)dx$

(106) $\int \ln\sqrt{x-1}dx$

(107) $\int \ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})dx$

(108) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx$

(109) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

(110) $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx$

(111) $\int \frac{\ln(x+1)}{x^2}dx$

(112) $\int \frac{x\ln x}{\sqrt{x^2-1}}dx$

(113) $\int \frac{dt}{t(1+\ln t)\sqrt{(\ln t)(2+\ln t)}}$

(114) $\int \sin\ln x dx$

(115) $\int \cot x\ln(\sin x)dx$

(116) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\ln(\tan x)}{\sin x\cos x}dx$

(117) $\int \frac{\cot x}{\ln\sin x}dx$

(118) $\int(1+\ln x)\sqrt{1+(x\ln x)^2}dx$